Homogeneous, weakly homogeneous, universally Baire

YasudaYasutomo

2020 年 2 月 16 日

Homogeneously Suslin, weakly homogeneously Suslin, universally Baire の関係についていくつかの事実を証明する．[*1]主に [1] を参考にしているが異なる定義を採用している．Stationary tower forcing は主に [2] を参考とし既知とした．Martin-Steel による projective determinacy の無矛盾性証明 [5] にて示されたいくつかの結果も既知とする．

1 Tree representation

次を示すことを目標とする．

定理 1.1. λ を limit of Woodin とする．このとき実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ に関して次は同値.

1. A は $<\lambda$-homogeneously Suslin.
2. A は $<\lambda$-weakly homogeneously Suslin.
3. A は λ-universally Baire.

定義 1.2 (homogeneous tree)**.** κ を無限基数とする．$X \times Y$ 上の木 T が κ-homogeneous であるとはある列 $\langle U_s \mid s \in {}^{<\omega}X \rangle$ が存在して次を満たすことをいう．

- 各 $s \in {}^{<\omega}X$ に対して, U_s は $T[s]$ 上の κ-完備な超フィルター.
- 各 $s \subseteq t \in {}^{<\omega}X$ に対して, U_t は U_s の射影.[*2]
- 任意の $x \in p[T]$ に対して, tower $\langle U_{x \restriction n} \mid n \in \omega \rangle$ は well-founded. [*3]

T が任意の $\lambda < \kappa$ について λ-homogeneous であるとき $<\kappa$-homogeneous という．

定義 1.3.

- $A \subseteq {}^{\omega}X$ が κ-homogeneously Suslin であるとはある κ-homogeneous tree T が存在して $A = p[T]$ を満たすときのことをいう．
- ${}^{\omega}X$ の部分集合で κ-homogeneously Suslin であるもの全体を Hom^X_κ と表す.
- $\mathrm{Hom}^X_{<\kappa} = \bigcap_{\lambda<\kappa} \mathrm{Hom}^X_\lambda$ とし, $\mathrm{Hom}_\kappa = \mathrm{Hom}^\omega_\kappa$ とする．

同様に $<\kappa$-homogeneously Suslin も定義する．

[*1] この結果も重要と感じたので「決定性公理の無矛盾性」の記事から分離して書きました．
[*2] 超冪の間の初等埋め込みを誘導する．
[*3] 超フィルターの列が誘導する超冪のシステムの direct limit が well-founded ということ．

命題 1.4. Hom_κ^X は continuous reducibility に関して閉じている.

証明. κ-Suslin set における証明と同様である. □

また可算共通部分に関して閉じていることも簡単に示せる. Homogeneity は決定性を導く.

定理 1.5 (Martin)**.** $A \subseteq {}^\omega X$ が $|X|^+$-homogeneously Suslin であると仮定する. このとき A は決定的.

定義 1.6 (weakly homogeneous tree)**.** κ を無限基数とする. $X \times Y$ 上の木 T が κ-weakly homogeneous であるとはある列 $\langle U_{s,t} \mid (s,t) \in {}^{<\omega}X \oplus {}^{<\omega}\omega \rangle$ が存在して次を満たすことをいう.

- 各 $(s,t) \in {}^{<\omega}X \oplus {}^{<\omega}\omega$ に対して, $U_{s,t}$ は $T[s]$ 上の κ-完備な超フィルター.
- 各 $(p,r) \subseteq (q,s) \in {}^{<\omega}X \oplus {}^{<\omega}\omega$ に対して, $U_{q,s}$ は $U_{p,t}$ の射影.
- 任意の $x \in p[T]$ に対してある $y \in \mathbb{R}$ が存在して $\langle U_{x\restriction n, y\restriction n} \mid n \in \omega \rangle$ は well-founded.

T が任意の $\lambda < \kappa$ について λ-weakly homogeneous であるとき $<\kappa$-weakly homogeneous という.

定義 1.7. $A \subseteq {}^\omega X$ が κ-weakly homogeneously Suslin であるとはある κ-weakly homogeneous tree T が存在して $A = p[T]$ を満たすときのことをいう.

同様に $<\kappa$-weakly homogeneously Suslin も定義する.

命題 1.8. $A \subseteq {}^\omega X$ に対して次は同値.

1. A は κ-weakly homogeneously Suslin.
2. A はある κ-homogeneously Suslin set B の射影.

定義から明らかに κ-homogeneously Suslin ならば κ-weakly homogeneously Suslin である.

定義 1.9. κ を無限基数とする. $X \times Y$ 上の木 T と $X \times Z$ 上の木 U の組 (T,U) が κ-absolute complement pair であるとは, 任意のサイズ κ 未満の半順序 $\mathbb{P}$ と $(V,\mathbb{P})$-generic G に対して次が成立することをいう.

$$V[G] \models p[T] = {}^\omega X \setminus p[U]$$

V において $p[T] \cap p[U] = \emptyset$ のとき絶対性から任意の generic extension で $p[T] \cap p[U] = \emptyset$ が成立する. また (T,U), (R,S) を κ-absolute complement pair で V において $p[T] = p[R]$ を満たすものとする. 絶対性の議論によりサイズ κ 未満の任意の半順序 $\mathbb{P}$ と $(V,\mathbb{P})$-generic G に対して, $V[G]$ において $p[T] = p[R]$ が成立する.

定義 1.10 (universally Baire)**.** κ を無限基数とする.

- $A \subseteq {}^\omega X$ が κ-universally Baire であるとはある κ-absolute complement pair (T,U) が存在して $A = p[T]$ を満たすときのことをいう.
- uB_κ^X を ${}^\omega X$ の部分集合で κ-universally Baire であるもの全体とする.
- $\mathrm{uB}_\kappa = \mathrm{uB}_\kappa^\omega$ とする.

Martin-Solovay の結果から κ-weakly homogeneously Suslin ならば κ-universally Baire であることがわかる. $\langle r_i \mid i \in \omega \rangle$ を $\omega^{<\omega}$ の標準的な数え上げとし固定しておく. T を κ-weakly homogeneous tree とする.

$(p,r) \subseteq (q,s) \in {}^{<\omega}X \oplus {}^{<\omega}\omega$ に対して，超冪 $\mathrm{Ult}(V, U_{p,r})$ と $\mathrm{Ult}(V, U_{q,s})$ の間に誘導される初等埋め込みを $i_{(p,r),(q,s)} \colon \mathrm{Ult}(V, U_{p,r}) \to \mathrm{Ult}(V, U_{q,s})$ で表す．

定義 1.11 (Martin-Solovay tree)**.** T を $X \times Y$ 上の κ-weakly homogeneous tree とする．α を順序数とする．Martin-Solovay tree $\mathrm{ms}(T, \alpha)$ とは次を満たす組 (p, t) から成る $X \times \alpha$ 上の木である．

- $p \in {}^{<\omega}X$.
- $t \in {}^{\mathrm{lh}(p)}\mathrm{ON}$
- $t(0) < \alpha$
- 任意の $i, j < \mathrm{lh}\,(p)$ に対して，$r_i \subsetneq r_j$ ならば $t(j) < i_{(p \restriction \mathrm{lh}(r_i), r_i),(p \restriction \mathrm{lh}(r_j), r_j)}(t(i))$ が成立する．

アイデアとしては κ-weakly homogeneous tree T から誘導される V の超冪からなるシステムにおいて，direct limit が ill-founded となるような path を集めている．このアイデアをそのまま形にすると次の定理の証明となる．

定理 1.12. T を $X \times Y$ 上の κ-weakly homogeneous tree とする．$\alpha \geq |Y|^+$ に対して $p[\mathrm{ms}(T, \alpha)] = {}^{\omega}X \setminus p[T]$ が成立する．

κ-weakly homogeneously Suslin ならば κ-universally Baire である．

定理 1.13. T を $X \times Y$ 上の κ-weakly homogeneous tree とする．十分大きい θ に対して，$(T, \mathrm{ms}(T, \theta))$ は κ-absolute complement pair となる．

証明. 絶対性と Lévy-Solovay の定理より良い． □

系 1.14. $A \subseteq \mathbb{R}$ が κ-weakly homogeneously Suslin ならば κ-universally Baire.

ここまで一般の κ について成り立つ方向を示した．二つの逆向きの成立は Woodin 基数を用いていくつかの結果が示されている．Projective determinacy の無矛盾性証明において次を示すことが鍵であった．そこでは Woodin 基数の存在のもとで適切な alternating chain を構成して超フィルターの列を得ていた．

定理 1.15 (Martin-Steel)**.** δ を Woodin 基数とし，$X \in V_\delta$ とする．また T を δ^+-weakly homogeneous tree とする．このとき十分大きい θ に対して $\mathrm{ms}(T, \theta)$ は $<\delta$-homogeneous tree となる．

証明は非常に大変であるので省略する．

系 1.16. δ を Woodin 基数とする．$A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を δ^+-homogeneously Suslin とする．このとき $\neg\exists^{\mathbb{R}} A$ は $<\delta$-homogeneously Suslin となる．

系 1.17. λ を limit of Woodin とする．このとき $\mathrm{Hom}_{<\lambda}$ は $\exists^{\mathbb{R}}$, 補集合と取る操作, continuous reducibility に関して閉じている．

系 1.17 と Martin の $\mathbf{\Pi}^1_1$-determinacy から無限個の Woodin 基数の存在を仮定すると projective determinacy が成立することがわかる．また $\mathrm{Hom}_{<\lambda}$ に関して Wadge order の議論により次が成立する．

定理 1.18. λ を limit of Woodin とする．このときある $\kappa < \lambda$ が存在して $\mathrm{Hom}_\kappa = \mathrm{Hom}_{<\lambda}$ が成立する．

証明. 任意の $\kappa < \lambda$ に対して $\mathrm{Hom}_\kappa = \mathrm{Hom}_{<\lambda}$ であると仮定する．このとき Wadge order の無限降下

列 $A_0 >_w A_1 >_w \dots$ が存在する．しかし十分な決定性があるため，Martin-Monk による $<_w$ の well-foundedness の証明と同様にして矛盾． $\square$

次に universally Baireness から weak homogeneity を得る．次の補題 1.19 は便利な特徴付けである．

補題 1.19. $\omega \times Z$ 上の木 T に対して次は同値.

1. T は κ-weakly homogeneous.
2. ある ${}^{<\omega}Z$ 上の κ-完備な超フィルターの可算族 Σ が存在して，$x \in p[T]$ とある countably complete な $\langle \mu_n \mid n \in \omega \rangle \in {}^{\omega}\Sigma$ が存在して任意の $n \in \omega$ に対して $T[x \restriction n] \in \mu_n$ が成立することが同値となる.

定理 1.20 (Woodin)**.** δ を Woodin 基数とする．T, U を $\omega \times Z$ 上の木で (T, U) は δ^+-absolutely complement pair とする．このとき T は $<\delta$-weakly homogeneous となる.

証明. (T, U) を δ^+-absolutely complement pair とする．正則基数 η を $T, U \in V_\eta$ となるように十分大きく取る．T' と U' をそれぞれ T と U の部分木で V_η 上で V_δ の元と T, U, δ をパラメタに用いて定義可能な node 全体とする．このとき $|T'| = |U'| = \delta$ となる．$\mathbb{Q}_{<\delta}$ を countable stationary tower とする．実数の $\mathbb{Q}_{<\delta}$-name はある到達不能基数 $\kappa < \delta$ が存在して $\mathbb{Q}_{<\kappa}$-name として実現できるので V_δ の元として取れる．このことから $\mathbb{Q}_{<\delta} \vdash p[\check{T}'] = \mathbb{R} \setminus p[\check{U}']$ が成立する．よって $p[T] = p[T']$ が成立する．また T' が $<\delta$-weakly homogeneous のとき，T も $<\delta$-weakly homogeneous であることから一般性を損なうことなく T と U は $\omega \times \delta$ 上の木だと仮定して良い．κ を任意に取る．T が κ-weakly homogeneous であることを示す．δ は Woodin より κ を $<\delta$-T-strong だと仮定して良い．各 $\kappa < \lambda < \delta$ に対して $j_\lambda \colon V \to M_\lambda$ を λ-T-strong embedding とする．Σ_λ を各 $(s, u) \in T \cap V_\lambda$ と $X \subseteq \kappa^{<\omega}$ に対して，

$$X \in \Sigma_\lambda(s, u) \leftrightarrow u \in j_\lambda(X)$$

と定義する.

主張 1. 各 $\kappa < \lambda < \delta$ に対して次が成立する.

1. $\Sigma_\lambda(s, u)$ は κ-完備な超フィルターで $T[s] \cap V_\kappa \in \Sigma_\lambda(s, u)$ が成立する.
2. 各 $(s, u) \subseteq (t, v) \in T \cap V_\lambda$ に対して，$\Sigma_\lambda(t, v)$ は $\Sigma_\lambda(s, u)$ の射影.
3. 各 $(x, f) \in [T \cap V_\lambda]$ に対して，$\langle \Sigma_\lambda(x \restriction n, f \restriction n) \mid n \in \omega \rangle$ は well-founded.

1, 2 は良い．$(x, f) \in [T \cap V_\lambda]$ に対して，direct limit は M_λ の初等部分モデルとなることから良い．$\dashv$
G を $(V, \mathbb{Q}_{<\delta})$-generic とし，$i \colon V \to N \subseteq V[G]$ を generic ultrapower embedding とする.

主張 2. $i(T)$ は N において $i(\kappa)$-weakly homogeneous.

$\kappa^{<\omega}$ 上の κ-完備な超フィルター全体を $m_\kappa(\kappa)$ で表す．$\sigma = i\text{"}m_\kappa(\kappa)$ が $i(T)$ の κ-weak homogeneity の witness となっていることを示す．N は $V[G]$ において可算列で閉じているから $\sigma \in N$ となる．$x \in p[i(T)] \cap N$ を任意に取る．(T, U) は δ^+-absolutely complement pair より $x \in p[T]$ が成立する．$\lambda < \delta = \omega_1^{V[G]}$ を十分大きく取ることで $x \in p[T \cap V_\lambda]$ とする．f を $(x, f) \in [T \cap V_\lambda]$ となるように取る．初等性より $\langle i(\Sigma_\lambda)(x \restriction n, i(f) \restriction n) \mid n \in \omega \rangle$ は N において well-founded となる．よって $i(T)$ は N において $i(\kappa)$-weakly homogeneous. $\dashv$

初等性から T は κ-weakly homogeneous となる. $\square$

よって以上のことから次が示された．

定理 1.21. λ を limit of Woodin とする．このとき実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ に関して次は同値.

1. A は $<\lambda$-homogeneously Suslin.
2. A は $<\lambda$-weakly homogeneously Suslin.
3. A は λ-universally Baire.

参考文献

[1] John R. Steel, The Derived Model Theorem, 2008.

[2] P. Larson, The stationary tower, University Lecture Series, American Mathematical Society, 2004.

[3] Akihiro Kanamori, The higher infinite, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[4] W. Hugh Woodin, Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees,Proc. Nat. Acad. Sci. USA 85, 6587-6591.

[5] D.A. Martin and J.R. Steel, A Proof of Projective Determinacy, Journal of the American Mathematical Society bf 2 (1989), 71-125.

[6] van Wesep R. (1978) Wadge degrees and descriptive set theory. In: Kechris A.S., Moschovakis Y.N. (eds) Cabal Seminar 76-77. Lecture Notes in Mathematics, vol 689. Springer, Berlin, Heidelberg.